Lycée de Khniss
Prof : M^{me} Bakir

DEVOIR DE SYNTHESE N° 3

Classe : 4ème MATHS
Date : 10 / 5 / 2012
Durée : 4 heures

EXERCICE N°1 : ***(4 pts)***

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

I) Une série statistique est représentée par le nuage de points M_i (x_i , y_i) ci-dessous.

On note G le point moyen de la série.

1) Le nuage de points est celui de la série { 9 , 13 , 15 , 18 , 20 , 21 }.
2) Le point moyen est G(3,5 ; 15).
3) D'après la forme du nuage, on peut envisager un ajustement par une fonction affine de la forme ax + b avec a est négatif.
4) L'équation de la droite de régression de y en x est : y = 7.6x + 2.4.

II) 1) Soit n un entier naturel non nul, si $5n \wedge 340 = 85$ alors $n \equiv 0[17]$.

2) Si un entier relatif x est solution de $x^2 + x \equiv 0[6]$ alors $x \equiv 0\ [3]$

III) l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit D la droite passant par A(1 , -1 , 3)et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$. Alors

1) la sphère de centre O et tangente à D a pour rayon R = $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

2) L'homothétie h de centre O qui transforme D en D' telle que D' : $\begin{cases} x = 5 + 3\propto \\ y = 4 + 6\propto \\ z = 3 - 3\propto \end{cases} \quad \propto \in IR$

est une homothétie de rapport 3.

<u>EXERCICEN°2 :</u> ***(4 pts)***

1) Résoudre dans Z^2 l'équation (E) : $3x - 2y = 1$.

2) Soit n un entier naturel non nul.

   a) Montrer que le couple $(14n + 3 , 21n + 4)$ est solution de (E).
   b) En déduire la valeur de $(14n + 3) \wedge (21n + 4)$

3) on pose $d = (2n + 1) \wedge (21n + 4)$

   a) Montrer que $d = 1$ ou $d = 13$.

   b) Montrer que $n \equiv 6\ [13]$ si et seulement si $d = 13$.

4) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

   $A = 21n^2 - 17n - 4$ et $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$.

   a)Montrer que A et B sont divisibles par $n - 1$.

   b) Déterminer en fonction de n, $A \wedge B$.

<u>EXERCICEN°3 :</u> ***(4 pts)***

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace. On considère les points A(1,0,0) ; B(0,1,0) ; C(0,0,1) et D(1,1,1).

1)a) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

   b) Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre ABCD.

   c) En déduire la distance du point D au plan (ABC).

2) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3) Soit S l'ensemble des points M(x, y, z) vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$.

   a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.

   b) Montrer que S∩P est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4) Soit l'application h de l'espace dans lui-même, qui à tout point M(x , y , z)associe le point

   M'(x', y', z') tel que : $\begin{cases} x' = 4x - 1 \\ y' = 4y - 1 \\ z' = 4z - 1 \end{cases}$

   a) Montrer que h est une homothétie et préciser son centre et son rapport.

   b) Déterminer S' = h(S) puis déterminer S'∩P.

EXERCICEN°4 : ***(4pts)***

Un hôpital dispose d'un dépôt de stéthoscopes identiques. La durée de vie, en années d'un stéthoscope est une variable aléatoire notée X, qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.

On suppose que $p(X \geq 20) = 0.67$.

1) Montrer que $\boldsymbol{\lambda} \simeq 0{,}02$.
2) Calculer la probabilité qu'un stéthoscope ait une durée de vie inférieure à 10 ans.
3) Sachant qu'un stéthoscope a été utilisé pendant 15 ans, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie inférieure à 20 ans ?
4) On suppose que la durée de vie d'un stéthoscope est indépendante de celle des autres appareils .
   Le directeur de l'hôpital décide de commander 10 stéthoscopes .On admet que le nombre de stéthoscopes dans le dépôt est suffisamment important pour que l'achat de 10 stéthoscopes soit assimilé à 10 tirages indépendants avec remise.
   Soit Y le nombre de stéthoscopes achetés ayant une durée de vie supérieure à 20 ans.
   a) Quelle est la probabilité que parmi les 10 stéthoscopes achetés, 4 seulement aient une durée de vie supérieure à 20ans ?
   b) Quel est le nombre moyen de stéthoscopes, dans la commande, dont la durée de vie est supérieure à 20 ans ?
5) Combien l'hôpital devrait-il acheter de stéthoscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 20 ans, soit supérieure à 0.999 ?

EXERCICE N° 5 :

Soi t l'équation différentielle (E) : y' – yln2 = ln2.

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = a2^x + b$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer les réels a et b pour que f soit une solution de (E) et C_f passe par O.
   On prend pour la suite de l'exercice $f(x) = 2^x - 1$.
2) On pose g la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = \ln(2^x) - \ln(x + 1)$
   a) Dresser le tableau de variation de g sur [0 , 1].
   b) En déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.
   c) En déduire alors la position de C_f et de la droite $\Delta : y = x$ sur [0 , 1].
3) a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

   c) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f, tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ dans le même repère.
4) Expliciter f^{-1}.
5) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ et les droites D : x = 0 et D' : x = 1. Calculer A.